

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПРИВОДА ПЛАТЫ ЛАБОРАТОРНОГО СТЕНДА «ШАР НА ПЛАТЕ»

<sup>1</sup>Ровайн И.А.

<sup>1</sup>ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия (620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19), e-mail: [ria1993@mail.ru](mailto:ria1993@mail.ru)

Получено математическое описание (МО) электромагнитного привода (ЭП) лабораторного стенда «Шар на плате», предназначенного для управления положением шара на плате. Для получения МО ЭП был проведен эксперимент по снятию механических характеристик (МХ). Эксперимент состоял в регистрации входных напряжений ЭП, при которых плата под действием моментов ЭП, силы тяжести грузов, кардана и силы трения покоя была неподвижна. Было установлено соотношение, определяющее момент кардана. Также было установлено значение момента трогания. На основе экспериментальных данных было получено семейство МХ. Путем усреднения семейства МХ была получена характеристика, принятая в качестве МО ЭП. На основе МО ЭП был рассчитан компенсатор нелинейности ЭП. Использование компенсатора при синтезе управления платой предоставит законные основания для применения метода модального синтеза. В ходе проверки адекватности МО стенда, включающего МО ЭП и МО платы, было установлено, что значение момента инерции платы, предоставленное фирмой Feedback, существенно завышено. С учетом размеров платы и примерной плотности материала, из которого она изготовлена, а также массы колец, было рассчитано значение момента инерции платы. Рассчитанное значение оказалось в тридцать раз меньше значения, предоставленного фирмой Feedback.

Ключевые слова: математическое описание, электромагнитный привод, плата, механические характеристики

## THE MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE ELECTROMAGNETIC ACTUATOR OF THE PLATE OF THE LABORATORY STAND «BALL AND PLATE»

<sup>1</sup>Rovayn I.A.

<sup>1</sup>Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia (620002, Ekaterinburg, street Mira, 19), e-mail: [ria1993@mail.ru](mailto:ria1993@mail.ru)

The mathematical description (MD) of the electromagnetic actuator (EA) of the laboratory stand "Ball and plate", intended to control the position of the ball on the plate, was derived. For the derivation of MD of EA an experiment on removing the mechanical characteristics (MC) was carried out. The experiment consisted of recording the input voltage of EA at which the plate under the influence of EA moments, gravity force of the loads, universal link and force of static friction was motionless. The ratio defining cardan moments was derived. There was also found the magnitude of operating torque. On the basis of the experimental data the range of MC was obtained. By averaging the range of MC, the characteristic accepted as MD of EA was derived. On the basis of MD of EA a nonlinear compensator of EA was calculated. Use of the compensator in the synthesis of plate controlling will provide a legal basis for the application of the method of modal synthesis. During the test of the adequacy of the MD stand, including MD of EA and MD plates, it was found that the magnitude of inertia moment of the plate provided by the Feedback company, was significantly overestimated. The magnitude of inertia moment was calculated according to the size of the plate, the average density of the material, which it was made from and the weight of the rings. The calculated magnitude was thirty times less than the magnitude given by the Feedback company.

Key words: mathematical description, electromagnetic actuator, plate, mechanical characteristics

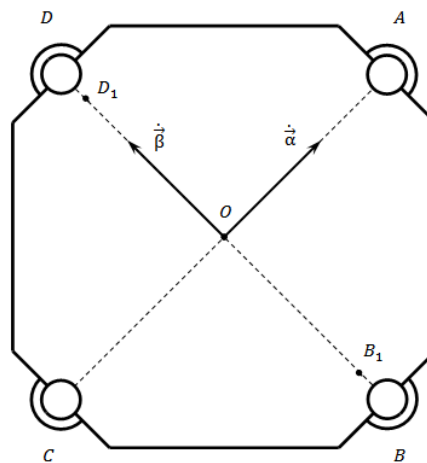
### Введение

Лабораторный стенд «Шар на плате» предназначен для управления положением шара на плате. Положение шара определяется с помощью веб-камеры. Изменение положения шара происходит за счет наклона платы под воздействием ЭП на алюминиевые кольца платы. Наклон платы определяется с помощью двух потенциометрических датчиков. Управление

стендом осуществляется с помощью среды Simulink пакета MATLAB. Управление положением шара на плате является достаточно сложной задачей, для решения которой в первую очередь нужно реализовать угловое управление платой без шара. Для этого необходимо иметь МО ЭП и платы. В данной статье главным образом рассматривается вопрос о МО ЭП.

### Эксперимент по снятию МХ ЭП

При подаче на ЭП напряжений  $u_\alpha$  и  $u_\beta$  он в свою очередь воздействует на плату посредством моментов силы  $M_\alpha$  и  $M_\beta$  соответственно. Мы принимаем ЭП безынерционным, то есть считаем, что время переходных процессов в ЭП является крайне малой величиной. Положение платы в пространстве характеризуется углами  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 1).



**Рис. 1. Вид на плату с положения веб-камеры (кнопка включения стенда находится возле кольца C):  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$  – псевдовекторы угловой скорости**

Для получения МО ЭП необходимо провести эксперимент по снятию МХ ЭП. МХ представляют собой зависимость  $M_\alpha = f(u_\alpha, \alpha)$ , а также зависимость  $M_\beta = f(u_\beta, \beta)$ . Ввиду ограниченного объема статьи мы рассматриваем снятие МХ ЭП и получение МО ЭП только для канала  $\alpha$ , замечая при этом, что для канала  $\beta$  все будет аналогично. Процесс снятия МХ состоит в регистрации управляющих напряжений  $u_\alpha$ , подаваемых на ЭП, при которых ЭП воздействует на плату так, что суммарный момент, действующий на плату, становится нулевым, а плата – неподвижной (стабилизированной). Стабилизация производится при углах наклона платы

$$\alpha = 0^\circ, \pm 1.75^\circ, \pm 3.5^\circ, \pm 5.5^\circ \quad (1)$$

и грузах массой

$$m = 0.005, 0.007, 0.009, 0.01, 0.012, 0.014, 0.015 \text{ кг},$$

которые мы располагаем на плате в точках  $B_1$  или  $D_1$  (рис. 1), на расстоянии от центра платы  $OB_1 = OD_1 = l = 0.158$  м. При этом должно обеспечиваться горизонтальное положение оси  $\vec{\alpha}$  (угол  $\beta = 0^\circ$ ). Для стабилизации углов  $\alpha$  и  $\beta$  применены астатические регуляторы, формирующие сигнал:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_{r\alpha}(t)\} &= -l_1\mathcal{L}\{\alpha(t)\} - l_2\frac{s}{0.01s+1}\mathcal{L}\{\alpha(t)\} - l_3\frac{1}{s}\mathcal{L}\{e_\alpha(t)\}, \\ \mathcal{L}\{u_{r\beta}(t)\} &= -l_1\mathcal{L}\{\beta(t)\} - l_2\frac{s}{0.01s+1}\mathcal{L}\{\beta(t)\} - l_3\frac{1}{s}\mathcal{L}\{e_\beta(t)\},\end{aligned}$$

где  $\alpha_{sp}$  – уставка по углу  $\alpha$ ,  $\beta_{sp}$  – уставка по углу  $\beta$ ,  $e_\alpha = \alpha_{sp} - \alpha$  – ошибка по углу  $\alpha$ ,  $e_\beta = \beta_{sp} - \beta$  – ошибка по углу  $\beta$ ,  $\frac{s}{0.01s+1}$  – реальное дифференцирующее звено. Коэффициенты этих регуляторов

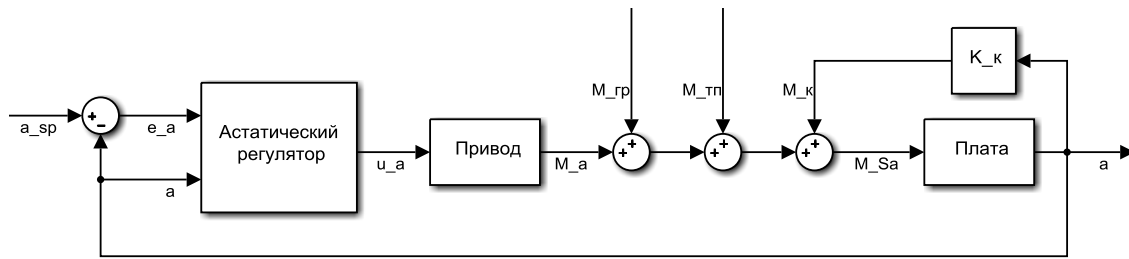
$$[l_1 \quad l_2 \quad l_3] = [42.06 \quad 3.72 \quad -166.25]$$

были найдены методом модального синтеза для модели платы, которая предлагается фирмой Feedback в документации по стенду [1]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha(t)\} &= \frac{1}{J_p s^2} \mathcal{L}\{M_\alpha(t)\}, \\ \mathcal{L}\{\beta(t)\} &= \frac{1}{J_p s^2} \mathcal{L}\{M_\beta(t)\},\end{aligned}\tag{2}$$

где  $J_p = 0.133$  кг · м<sup>2</sup> – момент инерции платы относительно осей  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\beta}$  (см. рис. 1). При этом приводу соответствовало звено с коэффициентом передачи  $k = 1 \frac{\text{Н·м}}{\text{В}}$ , а в качестве полюсов замкнутой системы были назначены  $p_{1,2} = -10 \pm j7.5$ ,  $p_3 = -8$ . Данные регуляторы выполняют задачу по стабилизации платы, что нельзя объяснить теоретически, т. к. сигналы формируемые регуляторами и подаваемые на ЭП, не учитывают наличие ЭП. Но данный стенд предназначен для демонстрации методов теории автоматического управления. Поэтому нам необходимо произвести теоретически обоснованный синтез управления платой, учитывающий МО ЭП, получение которого и рассмотрено в данной статье.

На рис. 2 представлена структурная схема системы стабилизации угла  $\alpha$ , соответствующая эксперименту по снятию МХ.



**Рис. 2. Структурная схема системы стабилизации угла  $\alpha$ :  $M_\alpha$  – момент ЭП,  $M_{гр}$  – момент силы тяжести грузов,  $M_к$  – момент кардана,  $M_{тп}$  – момент силы трения покоя в подшипниках карданного подпора,  $M_{\Sigma\alpha}$  – суммарный момент, воздействующий на плату**

Момент силы тяжести грузов  $M_{гр}$  определяется как:

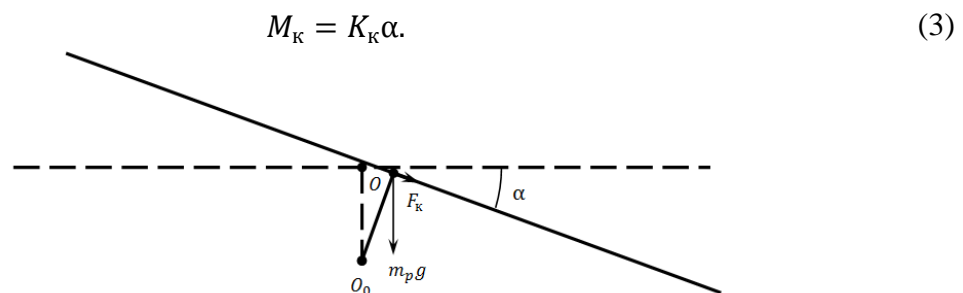
$$M_{гр} = \begin{cases} +mgl & \text{при грузе в точке } B_1, \\ -mgl & \text{при грузе в точке } D_1, \end{cases}$$

где  $g = 9.81$  – ускорение свободного падения.

Момент кардана  $M_к$  возникает под действием на рамку карданного подпора составляющей  $F_к$  силы тяжести платы  $m_p g$  (рис. 3). При нулевом значении угла  $\alpha$  сила  $F_к$  и момент  $M_к$  равны нулю. Высота рамки  $h = O_0 O = 0.022$  м, масса платы с кольцами  $m_p = 0.365$  кг. Силы  $F_к = m_p g \sin \alpha$ , а момент кардана:

$$M_к = h m_p g \sin \alpha = K_к \sin \alpha,$$

где  $K_к = h m_p g = 0.022 \cdot 0.365 \cdot 9.81 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0.0788 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . При малых углах  $\alpha$  можно считать, что  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Поэтому примем, что:



**Рис. 3. Вид на плату в направлении оси  $\vec{\alpha}$  (штрихом изображена плата при  $\alpha = 0$ )**

Про момент силы трения покоя  $M_{тп}$  можно сказать следующее. Если суммарный момент, воздействующий на плату, за вычетом момента трения покоя  $M_{\Sigma\alpha} - M_{тп}$  больше момента трогания  $M_т$ , то плата начинает движение из состояния покоя. В противном случае плата остается в состоянии покоя. С помощью выражения (3) для  $M_к$  мы можем определить значение момента трогания  $M_т$ . При воздействии на плату только моментов  $M_к$  и  $M_{тп}$

значение  $M_T$  определяется как значение  $-M_K$  при таком угле  $\alpha$ , начиная с которого плата приходит в движение из состояния покоя. Примерное значение такого угла  $\alpha = \pm 3.25^\circ$ , а соответствующее абсолютное значение  $M_T$ :

$$|M_T| = |-M_K| = |-K_K \alpha| = K_K |\alpha| = 0.0788 \cdot 3.25 \frac{\pi}{180} \text{ Н} \cdot \text{м} = 0.0045 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (4)$$

Из рис. 2 мы видим, что при стабилизированном угле  $\alpha$  на регулятор поступают нулевая ошибка  $e_\alpha$  и постоянное значение угла  $\alpha$ , то есть регулятор выдает фиксированное значение управляющего напряжения  $u_\alpha$ . При этом воздействующий на плату суммарный момент:

$$M_{\Sigma\alpha} = M_\alpha + M_{\text{гр}} + M_{\text{ТП}} + M_K = 0. \quad (5)$$

Откуда, пренебрегая моментом  $M_{\text{ТП}}$ , который по абсолютному значению согласно (4) не превышает  $0.0045 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , мы можем определить момент привода:

$$M_\alpha = -M_{\text{гр}} - M_K = -M_{\text{гр}} - K_K \alpha. \quad (6)$$

В результате снятия МХ были зафиксированы значения напряжения  $u_\alpha$ , представленные в табл. 1. Ячейки, в которых стоит прочерк, относятся к опытам, при которых плата была стабилизирована и без воздействия со стороны ЭП, то есть при  $M_\alpha = 0$ . При этом согласно выражению (5)  $M_{\text{гр}} + M_{\text{ТП}} + M_K = 0$ .

**Таблица 1. Результаты снятия МХ**

$M_{\text{гр}}, \text{Н} \cdot \text{м}$	$u_\alpha, \text{В}$						
	$\alpha = -5.5^\circ$	$\alpha = -3.5^\circ$	$\alpha = -1.75^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1.75^\circ$	$\alpha = 3.5^\circ$	$\alpha = 5.5^\circ$
0.0232	-1.1200	-1.0600	-0.9900	-1.0300	-0.9600	-0.8800	-0.7900
0.0217	-1.0900	-1.0500	-1.0500	-0.9700	-0.9600	-0.8900	-0.7970
0.0186	-0.9426	-0.9050	-0.9200	-0.9300	-0.8300	-0.8300	-0.7600
0.0155	-0.8400	-0.8090	-0.8400	-0.8400	-0.8300	-0.7500	-0.7150
0.0139	-0.6360	-0.7530	-0.8200	-0.8100	-0.7400	-0.7200	-0.6800
0.0108	—	-0.5400	-0.6060	-0.6400	-0.7100	-0.6500	-0.6300
0.0077	—	—	-0.5500	-0.5600	-0.6500	-0.5900	-0.5800
-0.0077	0.6130	0.6290	0.6290	0.5000	—	—	—
-0.0108	0.6740	0.7030	0.6680	0.5400	0.4800	—	—
-0.0139	0.6750	0.7670	0.7760	0.7400	0.6600	0.6600	—
-0.0155	0.7170	0.8055	0.8220	0.7800	0.7100	0.7500	0.6250
-0.0186	0.7230	0.8560	0.8940	0.8400	0.9200	0.9200	0.9014
-0.0217	0.8380	0.8640	0.9370	0.9400	0.9400	1.0100	1.0240
-0.0232	0.8574	0.9087	0.9700	0.9900	0.9900	1.0500	0.9300

### Получение МО ЭП по результатам эксперимента по снятию МХ ЭП

С помощью приложения Curve Fitting пакета MATLAB, используя соотношение (6) для определения  $M_\alpha$  и соответствующие значения  $u_\alpha$  (табл. 1) и учитывая, что при  $u_\alpha = 0$  и  $M_\alpha = 0$ , было получено семейство МХ ЭП при значениях  $\alpha$  (1). Каждая МХ ЭП представляется полиномом третьей степени:

$$M_{\alpha}(u_{\alpha}) = p_1 u_{\alpha}^3 + p_2 u_{\alpha}^2 + p_3 u_{\alpha} + p_4.$$

В табл. 2 представлены значения коэффициентов полиномов для каждой МХ.

**Таблицы. 2. Коэффициенты полиномов**

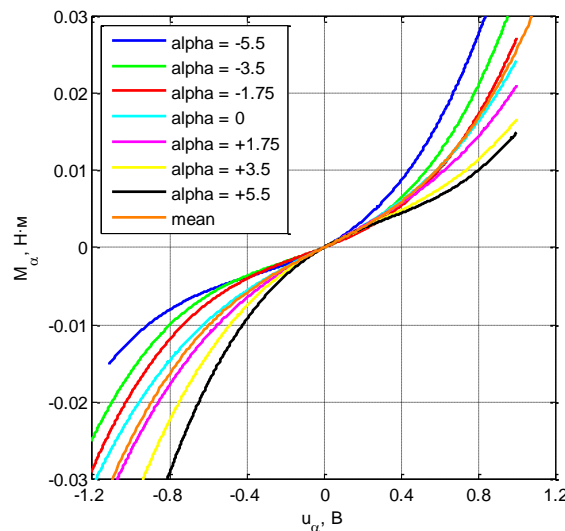
$\alpha$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$
$-5.5^{\circ}$	0.01373	0.01522	0.0135	0
$-3.5^{\circ}$	0.01433	0.008538	0.0103	0
$-1.75^{\circ}$	0.01339	0.004138	0.009678	0
$0^{\circ}$	0.01007	0.001325	0.01297	0
$1.75^{\circ}$	0.01002	-0.002648	0.01373	0
$3.5^{\circ}$	0.01168	-0.008647	0.01364	0
$5.5^{\circ}$	0.01533	-0.01507	0.01472	0

Для получения из семейства МХ ЭП одной характеристики, в которой убрана зависимость от  $\alpha$ , усредним соответствующие значения коэффициентов полиномов (табл. 2).

Полином с усредненными коэффициентами

$$M_{\alpha}(u_{\alpha}) = 0.0127u_{\alpha}^3 + 0.000408u_{\alpha}^2 + 0.0126u_{\alpha} \quad (7)$$

примем в качестве МО ЭП канала  $\alpha$ . Семейство МХ ЭП и усредненная характеристика представлены на рис. 4.



**Рис. 4. Семейство МХ ЭП и усредненная характеристика**

#### Расчет компенсатора нелинейности ЭП

Используя МО ЭП (7), мы можем сделать связь между моментом  $M_{\alpha}$  на выходе ЭП и напряжением на выходе регулятора  $u_{r\alpha}$  линейной:

$$M_{\alpha}(u_{r\alpha}) = k u_{r\alpha} \quad (8)$$

(при  $k = 1 \text{ Н} \cdot \text{м/В}$  выход регулятора  $u_{r\alpha}$  будет численно равен моменту ЭП  $M_{\alpha}$ ). Для этого между регулятором и ЭП нужно добавить звено, которое мы будем называть

компенсатором нелинейности ЭП. Из выражений (7) и (8) мы получим зависимость  $u_\alpha$  от  $u_{r\alpha}$ , то есть функцию компенсатора:

$$\begin{aligned} 0.0127u_\alpha^3 + 0.000408u_\alpha^2 + 0.0126u_\alpha &= ku_{r\alpha}, \\ 0.0127u_\alpha^3 + 0.000408u_\alpha^2 + 0.0126u_\alpha - ku_{r\alpha} &= 0, \\ au_\alpha^3 + bu_\alpha^2 + cu_\alpha + d &= 0; \end{aligned}$$

для решения последнего уравнения (нахождения его действительного корня) воспользуемся формулой Кардано. Определим коэффициент  $p$  и функцию  $q$  от  $u_{r\alpha}$ :

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a};$$

через  $p$  и  $q$  определим еще две функции  $v$  и  $w$  от  $u_{r\alpha}$ :

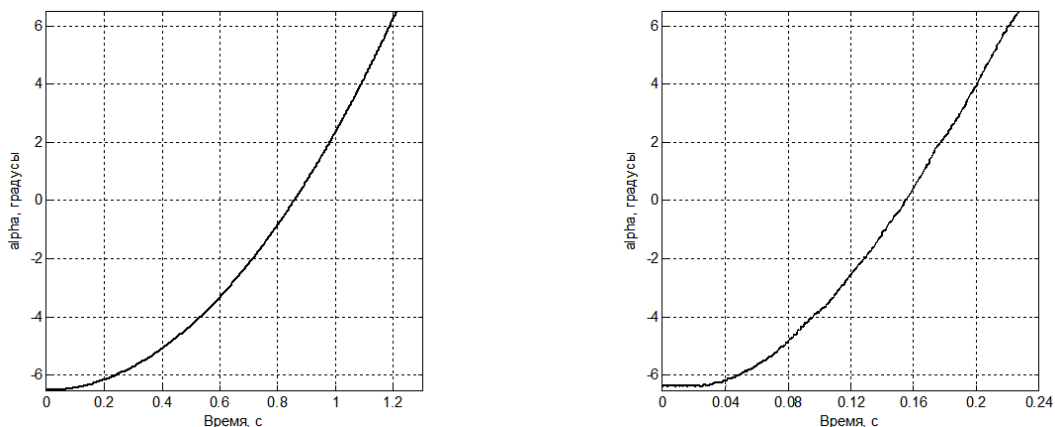
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}};$$

используя  $v$  и  $w$ , найдем  $u_\alpha$  как функцию от  $u_{r\alpha}$ :

$$u_\alpha = v + w - \frac{b}{3a}.$$

### Проверка адекватности МО стенда для канала $\alpha$

Проверим адекватность МО стенда для канала  $\alpha$ , включающего МО ЭП (7) и МО платы (2). Для этого подадим на вход модели, соответствующей МО стенда для канала  $\alpha$ , сигнал  $u_\alpha = 1.25$  и посмотрим на изменение угла  $\alpha$ , задав начальные условия  $\alpha(0) = -6.5^\circ$  и  $\alpha'(0) = 0$ . Далее проведем аналогичную проверку на стенде. Результаты моделирования и проверки на стенде представлены на рис. 5.



**Рис. 5. Результаты моделирования (слева) и проверки на стенде (справа)**

Мы видим, что при моделировании изменение угла  $\alpha$  от  $-6.5^\circ$  до  $+6.5^\circ$  происходит значительно медленнее, чем при проверке на стенде. В нашей модели плата очень инертна. Мерой инертности платы является момент инерции  $J_p$ , значение которого предоставлено в документации фирмы Feedback [1]. Учитывая размеры платы и примерную плотность материала, из которого она изготовлена, а также массу колец, мы получили в результате расчета значение момента инерции:

$$J_p = 0.00455 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (9)$$

## Выводы

На основе данных эксперимента (табл. 1) по снятию МХ ЭП лабораторного стенда Шар на плате, было получено МО ЭП (7). МО ЭП позволило рассчитать компенсатор нелинейности ЭП, который на законных основаниях позволит применить метод модального синтеза при управлении платой. В ходе проверки адекватности МО стенда для канала  $\alpha$  и дальнейшего расчета было установлено значение момента инерции платы (9). Значение момента инерции (9) в 29.89 раз меньше значения, предоставленного фирмой Feedback [1]. Также были получено выражение для момента кардана (3) и значение момента трогания (4), которые в дальнейшем могут быть учтены в более совершенном МО платы, чем МО (2).

## Список литературы

1. Ball and Plate Control Experiments 33-240-LabView (For use with LabVIEW 8.6 or later) / Feedback Instruments Ltd., Park Road, Crowborough, East Sussex, TN6 2QR, UK